BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ

№2 Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası 2005

ÇOXÖLÇÜLÜ ELASTİK-ÖZLÜ-PLASTİK MƏSƏLƏNİN XARAKTERİSTİK ÜSULLA HƏLLİ

R.S.QULİYEV

Azərbaycan Milli Elmlər Akademiyasının Riyaziyyat və Mexanika İnstitutu

Məqalədə elastik-özlü-plastik məsələnin həlli istiqamətində yerinə yetirilmiş bəzi əsas işlər haqqında qısa məlumat verilmişdir. Məlumdur ki, çoxölçülü elastik-özlü-plastik məsələni xarakterizə edən əsas riyazi münasibətlər kvazixətti hiperbolik tip xüsusi törəməli diferensial tənliklər sistemidir. Burada ixtiyari ikiölçülü kvazixətti hiperbolik tənliklər sistemi nəzərdən keçirilmişdir. Belə ki, ikiölçülü kvazixətti hiperbolik tənliklər sisteminin bixarakteristik şəklə gətirilməsi qaydası verilmiş və bundan əlavə münasib diskret münasibətlər göstərilmişdir.

Elastik-özlü-plastik məsələnin həlli istiqamətində son onilliklərdə yerinə yetirilmiş sanballı işlərin əksəriyyətində Laqranj şəbəkəsində birtərtibli sonlu fərqlərlə aproksimasiyalarla xarakteristik üsuldan istifadə edilmişdir. Bu üsul həllin daha dəqiq olmasını təmin edir. Bu baxımdan onun tətbiqi əhəmiyyətlidir. [2] işində elastik-özlü-plastik jismə xas olan ikiölçülü və üçölçülü məsələyə uyğun tənliklər sistemi üçün iki variantda dayanıqlı xarakteristik sxem verilmişdir. Birinji variantda sol məxsusi matrisin sətirlərinin hamısı eyni normala uyğundur. Digər variant "izotrop" sxemə aiddir, hansı ki, bu zaman heç bir istiqamət ayrıja ayrıla bilmir. Bu halda xarakteristik konusa normalları koordinat oxlarının istiqamətlərinə uyğun dörd toxunan müstəvi keçir (xarakteristik səthlər) və onlar konusun ətrafında piramida əmələ gətirir. Konusun təpəsindən və piramidanın oturajağının diaqonallarından keçən digər iki müstəvidən də istifadə edilir. Xarakteristik sxemin tədqiqində künj nöqtələrinin hesablanması mühüm əhəmiyyət kəsb edir. [3]-də bu məsələyə baxılmış, lakin sərhəd şərtlərinin bütün variantları üçün xarakteristik alqoritm qurmaq mümkün olmamışdır. D.S.Batler [1] işində göstərmişdir ki, xarakteristik münasibətlərə təkjə bixarakteristikalar boyunja törəmələr yox, həmçinin bixarakteristikalara normallar boyunja fəza törəmələri daxil olur. Bu ideya əsasında o, tərs xarakteristik üsul vermişdir. Bu üsul [4] işində inkişaf etdirilərək, xarakteristik konus üzərində münasibətlərin köməyi ilə kvazixətti diferensial tənliklər sistemi üçün sonlu-fərqlər sxemi qurulmuşdur. R.J.Klifton [3] işində elastiklik nəzəriyyəsinin müstəvi məsələsinin tənliklər sistemi üzərində Batler üsulunun ümumiləşməsini yerinə yetirmişdir. O, bu işdə, həmçinin ilkin və xarakteristik münasibətlərin *sonlu-fərqlərlə aproksimasiyalarından fəza törəmələrinin kənaredilmə əməliyyatından istifadə etmişdir. Kliftonun nəticələri Reker tərəfindən üçölçülü xətti elastik hala ümumiləşdirilmiş [5], nümunə kimi üç fəza dəyişəni ilə Lamba məsələsi həll edilmişdir. Baxılan ədədi üsulun elastik-plastik və elastik-özlü-plastik materialda ikiölçülü dalğanın yayılması məsələsinə ilk dəfə tətbiqi [6] işində yerinə yetirilmişdir. Bu işdə aparılan analiz göstərir ki, birinci tərtib dəqiqlikli sxem üçün xətaların sönmə xarakterini təyin edən yüksək tezlikli təşkilediji komponentlər zamana görə azalır, eyni zamanda, bu azalma mühüm dərəjədə zəifdir və həllin rəqslərinə əlavə olunur. Müqayisəli hesablamalarla göstərilmişdir ki, iki tərtib dəqiqlikli sxem hamar axının tədqiqində yüksək dəqiqlik tərtibinə malikdir.*

Burada ixtiyari kvazixətti hiperbolik tənliklər sisteminin xarakteristik üsulla ədədi həll metodu verilmişdir.

Kvazixətti hiperbolik tənliklər sisteminin matris şəklini aşağıdakı kimi yazaq:

$$E\frac{\partial \vec{W}}{\partial t} + A^1\frac{\partial \vec{W}}{\partial x} + A^2\frac{\partial \vec{W}}{\partial y} = \vec{f}, \qquad (1)$$

burada $\vec{W} = (w_1,...,w_p)$, $\vec{f} = (f_1,...,f_p)$, $A^1 = ((A^1_{ij}))$, $A^2 = ((A^2_{ij}))$, $i,j = \overline{1,p}$, E*-vahid matrisdir.*

Tənliklər sistemini bixarakteristik şəklə gətirək. Əvvəljə xarakteristik konusların təpəsindən və oturajağının mərkəzindən keçən ortoqonal xarakteristik müstəviləri uyğun olaraq xt *və* yt *koordinat müstəvilərinə paralel götürək. Onda istiqamətveriji kosinuslar* $\nu_1 = 1$, $\nu_2 = 0$ *olar. Yaza bilərik:*

$$\omega^k A^k = K^k_\xi \omega^k, \quad k = 1,2, \qquad (2)$$

burada ω^k – A^k*-nın sol məxsusi matrisi,* K^k_ξ – A^k*-nın xarakteristik matrisidir(*$k = 1,2$*). (1)-in hər iki tərəfini əvvəljə* ω^1*–ə, sonra* ω^2*–yə vursaq və (2)-ni nəzərə alsaq, alarıq:*

$$\begin{cases} \omega^1\left(\dfrac{\partial \vec{W}}{\partial t} + K^1_\xi\dfrac{\partial \vec{W}}{\partial x} + A^2\dfrac{\partial \vec{W}}{\partial y} - \vec{f}\right) = 0, \\ \omega^2\left(\dfrac{\partial \vec{W}}{\partial t} + A^1\dfrac{\partial \vec{W}}{\partial x} + K^2_\xi\dfrac{\partial \vec{W}}{\partial y} - \vec{f}\right) = 0. \end{cases} \qquad (3)$$

Bunlar xarakteristik münasibətlərdir. Fərz edək ki, ω^k *matrisinin tərsi var və onu* Ω^k *ilə işarə edək (*$k = 1,2$*):*

$$\Omega^k \equiv \left[\omega^k\right]^{-1}, \quad k = 1,2.$$

(3)-ün I münasibətini Ω^1*–ə, II münasibətini isə* Ω^2*–yə vursaq və* $\Omega^k \omega^k = E$ *(*$k = 1,2$*) olduğunu nəzərə aldıqdan sonra alınmış yeni münasibətləri tərəf-tərəfə toplasaq və (1)–dən istifadə etsək alarıq:*

$$\frac{\partial \vec{W}}{\partial t} = \Omega^1 \left[\omega^1 \left(\frac{\partial \vec{W}}{\partial t} + K_\xi^1 \frac{\partial \vec{W}}{\partial x} \right) \right] + \Omega^2 \left[\omega^2 \left(\frac{\partial \vec{W}}{\partial t} + K_\xi^2 \frac{\partial \vec{W}}{\partial y} \right) \right] - \vec{f}\,.$$

Yazılışın matris şəklindən onun komponentlər ilə ifadə olunmuş şəklinə keçsək, bəzi riyazi çevirmələrdən sonra alarıq:

$$\frac{\partial w_i}{\partial t} = \Omega^1_{i\alpha} \omega^1_{\alpha\beta} \frac{\partial w_\beta}{\partial s_1^{(\alpha)}} + \Omega^2_{i\alpha} \omega^2_{\alpha\beta} \frac{\partial w_\beta}{\partial s_2^{(\alpha)}} - f_i, \quad i = \overline{1, p},$$

burada sağ tərəfə daxil olan törəmələr bixarakteristik istiqamətlər boyunja törəmələrdir. Bu sonunju münasibətlər (1) tənliklər sisteminin baxılan oblastın daxili nöqtələrində bixarakteristik şəklidir. Baxılan oblastın sərhədlərində və künjlərində bixarakteristik münasibətlər də analoci yolla alınır.

Ortoqonal (x, y, t) *koordinat fəzasında məkan oxları boyunja* h *addımı ilə, zaman oxu boyunja isə* τ *addımı ilə paralelepipedik Laqranj fəza şəbəkəsi götürək. Diskret münasibətlərə keçək, belə ki, bunun üçün şəbəkənin, koordinatları* $(mh, kh, n\tau)$ *olan hər hansı* H *düyün nöqtəsində məjhulları* $\overset{n}{w}{}^{m,k}$ *kimi işarə edək. Çoxlu sayda müxtəlif riyazi əməliyyatlardan sonra silindrin daxili nöqtələri üçün diskret münasibətlər aşağıdakı kimi olur (oxasimmetrik dinamik məsələdə):*

$$\overset{n}{w}{}_i^{m,k} = \frac{1}{4}\left(\overset{n-1}{w}{}_i^{m+1,k-1} + \overset{n-1}{w}{}_i^{m-1,k-1} - \overset{n-1}{w}{}_i^{m-1,k+1} + \overset{n-1}{w}{}_i^{m+1,k+1} \right) -$$

$$- \frac{\tau}{4h} \sum_{\beta=1}^{6} \left\{ C_{i\beta} \left(\overset{n-1}{w}{}_\beta^{m+1,k-1} - \overset{n-1}{w}{}_\beta^{m-1,k+1} \right) + D_{i\beta} \left(\overset{n-1}{w}{}_\beta^{m+1,k+1} - \overset{n-1}{w}{}_\beta^{m-1,k-1} \right) \right\} - \tau \overset{n-1}{f}{}_i^{m,k},$$

$0 < m < m_*,\ 0 < k < k_*,\ i = \overline{1,6}$,

burada $C_{i\beta} = A^1_{i\beta} - A^2_{i\beta}$ *və* $D_{i\beta} = A^1_{i\beta} + A^2_{i\beta}$. *Fərqlər sxemi aşkar sxem üçün Kurant-Riss-İzakson dayanıqlılıq şərtini ödəyir [4].*

ƏDƏBİYYAT

1. Butler D.S. The numerical solution of hyperbolic systems of partial differential equations in three independent variables. Proc. Roy. Soc., London, 1962, A255.
2. Кукуджанов В.Н. О численном решении задач распространения упруго-вязко-пластических волн. Распространение упругих и упруго-пластических волн, 1973, с.223-230.
3. Клифтон Р.Дж. Разностный метод в плоских задачах динамической упругости. Сб. “Механика”, 1968, №1(107).

4. Магомедов К.М., Холодов А.С. О построении разностных схем для уравнений гиперболического типа на основе характеристических соотношений. ЖВММФ, 1969, 9, №2.
5. Рекер. Численные решения трехмерных задач динамической упругости. Тр. Амер. об-ва инж.-мех., 1970, сер. Е. 37, №1.
6. Рахматулин Х.А., Каримбайев Т.Д., Байтелиев Т. Применение метода пространственных характеристик к решению задач по распространению упруго-пластических волн. Изв. АН Каз. ССР, серия физ.-мат. наук, 1973, №1.

РЕШЕНИЕ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИМ МЕТОДОМ МНОГОМЕРНОЙ УПРУГО-ВЯЗКО-ПЛАСТИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ

Р.С.ГУЛИЕВ

АННОТАЦИЯ

В статье дана краткая информация о некоторых основных задачах, выполненных для упруго-вязко-пластичных задач. Известно, что основные математические соотношения, характеризующие многомерную упруго-вязко-пластическую задачу, состоят из системы квазилинейных гиперболических дифференциальных уравнений с частными производными. Поэтому здесь рассмотрены квазилинейные гиперболические системы уравнений, а также даны правила приведения их к бихарактеристическому виду, и указаны соответствующие дискретные соотношения.

SOLVING ELASTIC-VISCOUS-PLASTIC PROBLEM BY METHOD CHARACTERISTIC

R.S.QULIYEV

ABSTRACT

Here it is first given short information about some of main works which is fulfilled in the direction of solving elastic-viscous-plastic problem. It is known that, the main mathematical relations which determine elastic-viscous-plastic problem are a system of quazilinear differential equations of hyperbolic type. Therefore here has looked any system of quazilinear equations of hyperbolic type. So, it is given the rule of transformation from a system of quazilinear equations of hyperbolic type to bicharacteristic form.